***Exercice n°3 :***

1. a. La rotation de centre $O$ d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour expression complexe : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z$. La translation de vecteur $-\vec{u}$ a pour expression complexe : $z' = z_1 - 1$ donc $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1$.

b. $z_B = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d'où $z_B' = e^{i\frac{\pi}{3}} z_B - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 = 1 - 1 = 0$ donc T($B$) = $O$.

c. L'expression complexe de T est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1 = az + b$ où $a = e^{i\frac{\pi}{3}} \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $|a| = 1 \Rightarrow$ T est une rotation d'angle $\arg a \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{-1}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{-1}{1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

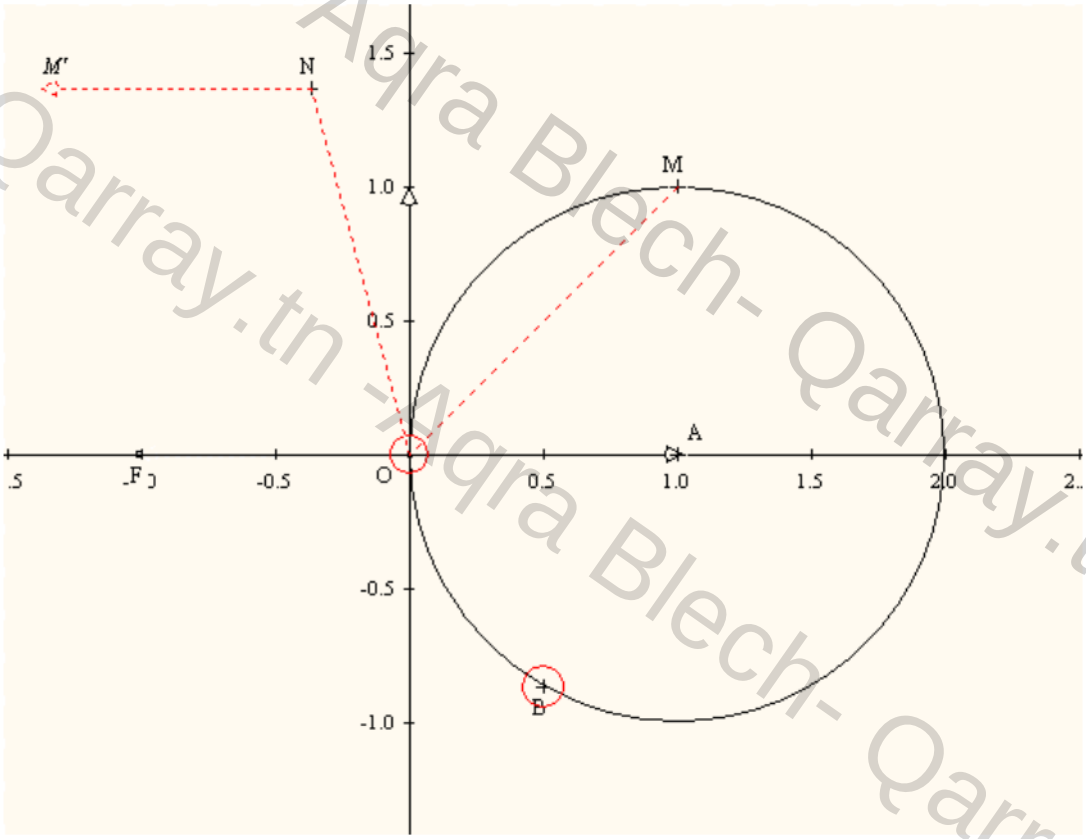
2. a. $\frac{z'}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+y^2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{x^2+y^2})$ donc

$$\mathrm{Re}(\frac{z'}{z}) = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+y^2}.$$

b. $OMM'$ est un triangle rectangle, donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ c'est à dire $\frac{z'}{z}$ est un imaginaire pur ou encore, sa partie réelle est nulle. Or $\Re e(\frac{z'}{z}) = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+y^2}$ donc le problème revient à résoudre l'équation :

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 1.$$

D'autre part, pour que le triangle $OMM'$ existe, il ne faut pas que $M = O$ ni que $M' = O$ ; ce dernier cas est réalisé lorsque $M = B$. On enlève donc $O$ et $B$.
Dans le plan complexe, ce cercle a pour équation $|z-1| = 1$.
L'ensemble des points $M$ tels que le triangle $OMM'$ soit rectangle est le cercle de centre $A$ de rayon 1 privé des points $O$ et $B$.




Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn